

УДК 656.62; 629.122

DOI: <https://doi.org/10.37890/jwt.vi73.327>

Эффективное вычисление волнового сопротивления судна с помощью интеграла Мичелла

А.Ю. Платов¹

<https://orcid.org/0000-0002-4589-0348>

Ю.И. Платов²

<https://orcid.org/0000-0003-1758-1684>

¹*Нижегородский архитектурно-строительный университет, г. Н.Новгород, Россия*

²*Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия*

Аннотация. Статья посвящена вопросу эффективного вычисления коэффициента волнового сопротивления судна с помощью интеграла Мичелла. Описанные в литературе вычислительные схемы предлагают применение простых квадратур (формулы трапеции и Симпсона) с фиксированным числом разбиения отрезков интегрирования. Такой подход предполагает ручную настройку алгоритма вычисления коэффициента волнового сопротивления для каждого нового судна и затрудняет оценку погрешности полученных результатов. Показано, что применение указанных простых квадратур позволяет получить надёжные результаты, но ценой десятков миллиардов вычислений функции судовой поверхности. Исследована применимость для вычисления интеграла Мичелла ряда более совершенных универсальных квадратур: адаптивных квадратур Ньютона-Котеса, Гаусса-Кронрода, а также квадратуры Кленшоу-Куртиса. В результате установлено, что надёжное и эффективное вычисление интеграла Мичелла обеспечивает квадратура Кленшоу-Куртиса. Вычислительная схема с использованием данной квадратуры позволяет построить автоматический алгоритм для расчёта волнового сопротивления судна путём пересчёта с прототипа.

Ключевые слова: волновое сопротивление судна, интеграл Мичелла, составные квадратуры, адаптивные квадратуры, квадратуры Ньютона-Котеса, квадратуры Гаусса-Кронрода, квадратура Кленшоу-Куртиса, пересчёт сопротивления с прототипа.

Efficient computation of ship's wave-pattern resistance using Michell's integral

Alexander J. Platov¹

<https://orcid.org/0000-0002-4589-0348>

Juri I. Platov²

<https://orcid.org/0000-0003-1758-1684>

¹*Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russia*

²*Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia*

Abstract. The aim of the present paper is to provide efficient method of computation the wave-pattern resistance of a ship using Mitchell's integral. The computational schemes described in publications suggest the use of simple quadratures (trapezoidal and Simpson's rule) with a fixed number of integration's intervals. This approach assumes manual setup of the algorithm for calculating the wave-making resistance for each new ship and complicates to estimate the obtained results error assessment. It is shown that the use of these simple quadratures enables to obtain reliable results by means of tens of billions of calculations of the ship's surface function. The applicability of more advanced universal quadratures for

calculating the Mitchell's integral is investigated: adaptive Newton-Cotes quadratures, Gauss-Kronrod quadratures and Clenshaw-Curtis quadratures. As a result, it is established that the Clenshaw-Curtis quadrature provides a reliable and efficient calculation of the Mitchell's integral. The computational scheme using this quadrature allows you to build an automatic algorithm for calculating the ship's wave-pattern resistance by type ship method

Keywords: wake-making resistance of ship, michell's integral, extended quadratures, adaptive quadratures, Newton-Cotes rules, Gauss-Kronrod rules and Clenshaw-Curtis quadratures, determination of ship's wake-making resistance by type ship method.

Введение

Вычисление сопротивления воды движению судна является одной из сложных задач гидромеханики, востребованных в первую очередь при проектировании судов, а также при нормировании времени следования и расхода топлива. Современные методы вычислительной гидродинамики предоставляют возможность решения этой задачи, обладая при этом значительными требованиями к вычислительным мощностям. Поэтому остаются востребованными упрощённые, так называемые инженерные методы расчёта сопротивления, применение которых целесообразно в предпроектном обосновании, а также в задачах рейсового планирования и нормирования.

Промежуточное положение занимают аналитические методы, из которых особое место занимают методы вычисления волнового сопротивления, основанные на теории потенциала. С помощью таких методов можно моделировать потенциальное движение жидкости более доступным способом, чем это возможно при применении методов, основанных на уравнениях с конечными разностями. Результаты такого моделирования применяются, например, для решения задачи оптимизации формы корпуса.

Первым аналитическим методом расчёта волнового сопротивления является метод Д.Г. Мичелла (так называемый интеграл Миччела (ИМ)), созданный в 1898 г. Несмотря на появление других аналитических методов, метод Миччела до сих пор остаётся одним из самых часто используемых для различных исследований методом. Основанием для развития других аналитических методов, отличных от миччелевского, послужили допущения, положенные Миччелом при выводе формулы волнового сопротивления.

Это, во-первых, допущение о малости квадратов вызванных скоростей, что позволяет линеаризовать граничные условия для постоянства давления на поверхности. Во-вторых, допущение о малости амплитуды волн, что позволяет исключить из граничных условий неизвестную заранее свободную поверхность (теория волн малой амплитуды). И, в-третьих, допущение о большом отношении длины судна к ширине (теория «тонкого» судна), которое позволяет за счёт отказа от решения задачи о мощности источников, заменяющих собой действие корпуса судна, свести интегральное уравнение к простому интегралу.

Несмотря на эти сильные допущения, результаты вычислений с использованием ИМ оказываются близкими к данным модельных испытаний, как это можно видеть из рис. 1.

Это позволяет предполагать, что с помощью ИМ возможно производить пересчёт волнового сопротивления с прототипа. Однако для такого расчёта необходим автоматический алгоритм вычисления ИМ, не требующий своей настройки при изменении характеристик судна. Такие алгоритмы в литературе не описаны.

Работы, посвящённые алгоритмической стороне вычислений ИМ, немногочисленны [1-4] и предлагают схемы численного интегрирования с фиксированным числом разбиения отрезка интегрирования. Такие схемы не только

непригодны для построения автоматического алгоритма, но и, как будет показано ниже, неэффективны из-за очень большого количества необходимых вычислений.

Методы

Интеграл Миччела (в усовершенствованной В. Виглеем форме) для расчёта волнового сопротивления R_W имеет вид [5]:

$$R_W = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int_1^\infty (I^2 + J^2) \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda, \tag{1}$$

где v – скорость судна, ρ - плотность воды, g – ускорение свободного падения, причём две подынтегральные функции интеграла (1) имеют вид:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \cos kx \, dx \int_0^T F'_x(x, z) e^{-pz} \, dz,$$

$$J = \int_{-L/2}^{L/2} \sin kx \, dx \int_0^T F'_x(x, z) e^{-pz} \, dz,$$

где L – длина судна, T – осадка судна, $y = F(x, z)$ – функция ординат смоченной поверхности судна (судовой поверхности), $p = \lambda^2 g/v^2$, $k = \lambda g/v^2$.

Г.Е.Павленко в 1937 г. была предложены другая форма ИМ, в которой за счёт интегрирования по частям было получен интеграл, не содержащий производных от функции судовой поверхности. Эта форма ИМ имеет вид:

$$R_W = \frac{4\rho g^4}{\pi v^6} \int_1^\infty (G^2 + H^2) \frac{\lambda^4}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda, \tag{2}$$

где

$$H = \int_{-L/2}^{L/2} \cos kx \, dx \int_0^T F(x, z) e^{-pz} \, dz$$

$$G = \int_{-L/2}^{L/2} \sin kx \, dx \int_0^T F(x, z) e^{-pz} \, dz$$

Используя преобразование $\lambda = 1/\cos \theta$, можно свести ИМ к интегралу вида:

$$R_W = \frac{4\rho g^4}{\pi v^6} \int_0^{\pi/2} (G^2 + H^2) \frac{d\theta}{\cos^5 \theta}, \tag{3}$$

где $p = \frac{g}{v^2 \cos^2 \theta}$, $k = \frac{g}{v^2 \cos \theta}$

В качестве примера вычисления ниже показана кривая коэффициента сопротивления

$$c_W = R_W/(\rho S v^2), \tag{4}$$

где S – это смоченная поверхность судна.

Кривая на рис. 1 вычислялась для параболической модели Виглея 829, поверхность которой описывается функцией

$$F(x, y) = \frac{B}{2} \left(1 - \frac{z}{T}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right). \quad (5)$$

На рис. 1 приведены результаты расчёта интеграла (3) для модели Виглея, а также данные модельных испытаний для той же модели, взятые из [6].

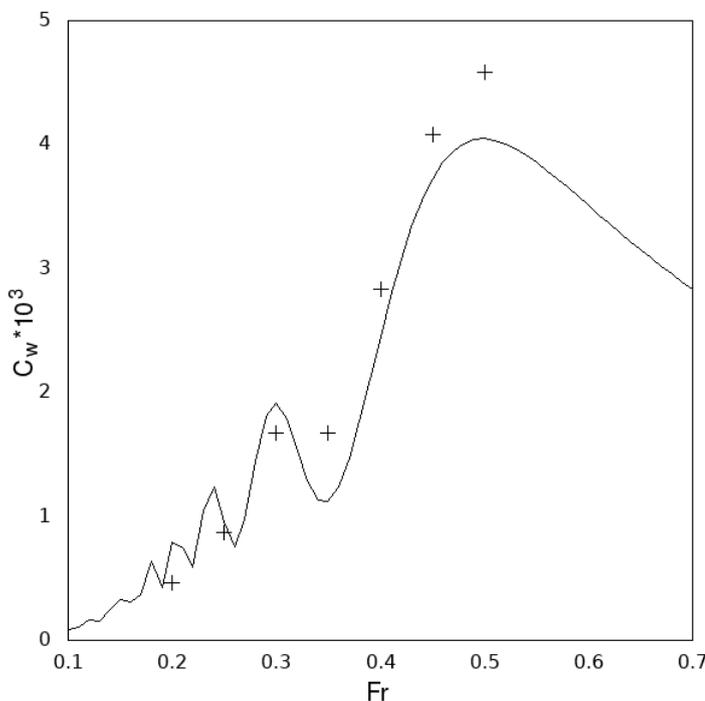


Рис. 1. Коэффициент волнового сопротивления для модели Виглея: сплошная – расчёт, маркеры – модельные испытания

Задача вычисления тройного интеграла Миччела является вычислительно сложной из-за осциллирующего характера функций $G^2 + H^2$ или $I^2 + J^2$. Пример поведения первой функции показан на рис. 2.

Кроме того, несобственный характер внешнего интеграла также усложняет вычисления. Интегрирование с применением стандартных квадратурных алгоритмов не всегда является эффективным, а в общем случае даже не позволяет получить решение.

Поэтому можно поставить вопрос об эффективном вычислении несобственного интеграла (по λ или по θ). Эта эффективность будет оцениваться как трудоёмкость вычисления ИМ при заданной относительной погрешности, принятой за 10^{-5} . Трудоёмкость вычисления ИМ будет оцениваться по количеству вычислений подынтегральной функции первого интеграла (по λ или по θ).

Поскольку при разных значениях числа Фруда $Fr = v/\sqrt{gL}$ требуется разное количество вычислений подынтегральной функции, то трудоёмкость будет определяться по среднему значению количества вычислений при расчёте сопротивления в диапазоне числа Фруда от 0,1 до 0,2 с шагом 0,01.

Трудоёмкость вычисления ИМ зависит также и от формы обводов. Поэтому будут применяться два типа обводов. Первый тип – это классическая модель Виглея [3], с

обводами, вычисляемыми по (5). Второй тип – параболическая модель, определяемая по формуле [7]:

$$F(x, y) = \frac{B}{2} f_1(x) f_2(y), \quad (6)$$

причём функции f_1 и f_2 вычисляются по выражениям

$$f_1 = \begin{cases} 1 - \left(\frac{-0,5(2x + L - 2L_k)}{L_k} \right)^{n_k}, & x \leq -\frac{L}{2} + L_k, \\ 1 - \left(\frac{0,5(2x - L + 2L_n)}{L_n} \right)^{n_n}, & x \geq \frac{L}{2} - L_n, \\ 1, & x \in \left(-\frac{L}{2} + L_k; \frac{L}{2} - L_n \right), \end{cases}$$

$$f_2 = \left(\frac{z}{T} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}},$$

где L_k и L_n - длины кормовой и носовой оконечностей соответственно, β - коэффициент полноты мидель-шпангоута, n_k и n_n - степени, которые вычисляются на основании значений коэффициента полноты ватерлинии кормовой и носовой частей соответственно по выражениям из [7], и здесь не приводятся.

Типы квадратур, обычно используемые в практике для интегрирования функций общего вида, исчерпываются

- 1) квадратурами Котеса (в частности, формулами трапеций и Симпсона), основанными на интегрировании интерполяционного полинома с равноотстоящими узлами;
- 2) квадратурами Гаусса, основанными на интегрировании специального полинома, обеспечивающего наивысшую алгебраическую точность квадратуры;
- 3) квадратурами Кленшоу-Куртиса, основанными на интегрировании интерполяционного полинома Чебышева.

Имеющиеся в литературе примеры реализации вычисления интеграла Миччеля используют составные формулы трапеций или Симпсона. Такие квадратуры программно наиболее просто реализуются, однако не являются самыми эффективными.

Для получения значения интеграла с заданной точностью любую квадратуру в принципе можно использовать тремя способами.

Во-первых, можно применять одну квадратуру, повышая её порядок до необходимого значения. Поскольку интерполяционный полином с равноотстоящими узлами в общем случае расходится, то такой способ для квадратур Котеса неприменим. Квадратура Кленшоу-Куртиса позволяет в этом случае при увеличении порядка использовать ранее вычисленные значения подынтегральной функции.

Во-вторых, можно применять составную квадратуру, разбивая отрезок интегрирования на некоторое, зависящее от заданной погрешности количество подотрезков равной длины и применяя на каждом из этих подотрезков квадратуру фиксированного и невысокого порядка. Квадратуры Котеса оказываются в этом способе самыми эффективными, так как позволяют использовать ранее вычисленные значения подынтегральной функции при увеличении количества подотрезков.

В-третьих, можно использовать адаптивную квадратуру, разделяя исходный отрезок интегрирования на подотрезки неравной длины, в зависимости от поведения функции. Квадратуры Котеса в этом случае также могут использовать уже ранее вычисленные значения подынтегральной функции.

Исходя из этого, для целей исследования были реализованы следующие квадратуры.

- 1) Составные квадратуры по формуле трапеций и Симпсона.
- 2) Адаптивные квадратуры Котеса с порядком от 2 до 8 включительно.
- 3) Адаптивные квадратуры Гаусса-Кронрода с 15 и 61 точками.
- 4) Квадратура Гаусса-Кронрода произвольного порядка.
- 5) Квадратура Кленшоу-Куртиса произвольного порядка.

Все алгоритмы были реализованы автором на языке С.

Алгоритм составных квадратур реализован по [8]. Для оценки ошибки используется априорное правило Рунге. Адаптивная квадратура Котеса реализована по примеру 8-точечной квадратуры из [9]. Оценка также осуществляется по правилу Рунге.

Веса для квадратур Гаусса-Кронрода вычисляются с помощью исходного кода из [10]. Для оценки погрешности используется априорное правило Кронрода [11]. Не удалось найти примера исходного кода квадратуры Кленшоу-Куртиса за исключением её адаптивной версии [13], поэтому автором был реализован оригинальный исходный код. Для оценки ошибки использовалось априорное правило из [12].

Для краткости можно сразу заметить, что трудоёмкость вычисления интеграла Миччела в тех его формах, в которых фигурируют производные от функции судовой поверхности, не отличается от трудоёмкости вычисления интегралов без производных. Поэтому далее они рассматриваться не будут.

Несобственный интеграл (2) вычисляется по следующей схеме [2].

Представим интеграл (2) в виде:

$$\int_1^{\infty} (I^2 + J^2) \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda = \int_1^{\infty} \frac{F(\lambda)\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda =$$

$$= \int_1^2 \frac{F(1)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda + \int_1^2 \frac{F(\lambda)\lambda^2 - F(1)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{F(\lambda)\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda.$$

Тогда первое слагаемое можно вычислить точно:

$$\int_1^2 \frac{F(1)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} d\lambda = F(1)[\ln(2 + \sqrt{3})].$$

Подынтегральная функция во втором слагаемом уже не содержит особенности в $\lambda = 1$ и при вычислениях может быть для λ , близких к 1, принята равной $F(1)\sqrt{\lambda^2 - 1}(\lambda^2 + 1)$.

Бесконечная сумма в третьем слагаемом вычисляется до тех пор, пока очередной член суммы не становится меньше заданной абсолютной погрешности.

Результаты

Для начала оценим трудоёмкость вычисления несобственных интегралов (2) и (3) при относительной погрешности 10^{-5} , оценивая её по количеству вычислений подынтегральной функции. Результаты расчётов показаны в табл. 1.

Таблица 1

Трудоёмкость вычисления интеграла Мичелла в форме (2) и (3)

Тип квадратуры	Модель Виглея		Параболическая модель	
	ИМ по (2)	ИМ по (3)	ИМ по (2)	ИМ по (3)
Трапеции с подбором шага	495	373	6006	638
Симпсон с подбором шага	485	466	2179	718
Симпсон с адаптацией	83	96	248	265
Котес 9-точек с адаптацией	149	142	240	165
Гаусс-Кронрод 15-точек с адаптацией	136	44	174	48*
Гаусс-Кронрод 61-точка с адаптацией	550	158	550	158
Гаусс-Кронрод произвольного порядка	141	268	311	803
Кленшоу-Куртис произвольного порядка	55	46	131	81

Звёздочкой отмечено преждевременное завершение вычислений из-за неверной априорной оценки погрешности.

Из результатов следует, что, во-первых, вычисление интеграла в форме (3) почти всегда требует меньшего числа вычислений. Во-вторых, наиболее эффективной оказалась квадратура Кленшоу-Куртиса. Хотя адаптивная квадратура Гаусса-Кронрода с 15-ю точками показывает сходные результаты, она не всегда обеспечивает надёжное вычисление интеграла с заданной погрешностью. В-третьих, квадратура Симпсона с подбором шага в целом не лучше формулы трапеции с подбором шага.

Теперь рассмотрим вопрос о трудоёмкости вычисления подынтегральной функции из интеграла в форме (3). Типичное её поведение для модели Виглея при $Fr = 0,2$ показано на рис. 2. Трудоёмкость в этом случае можно оценивать по количеству вычислений функций судовой поверхности (5) и (6).

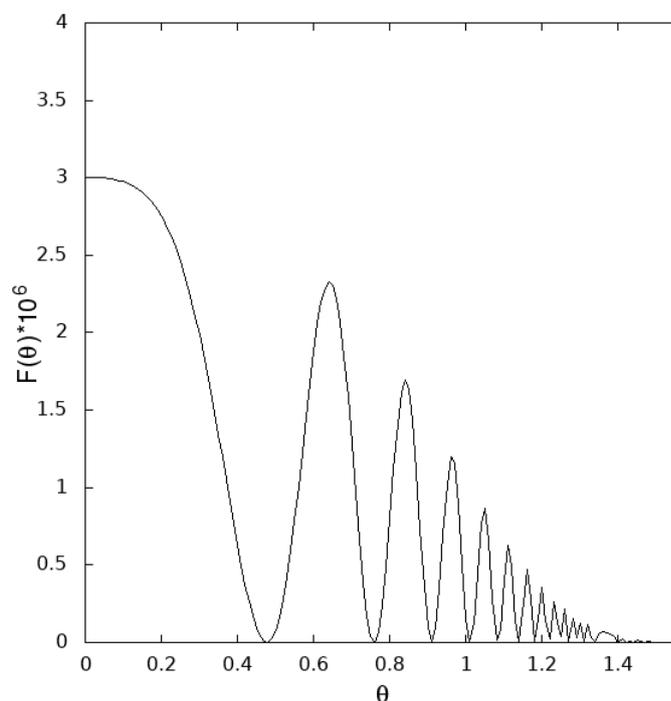


Рис. 2. Функция $F(\theta) = G^2 + H^2$ для модели Виглея при $Fr = 0,2$.

При расчётах была использована также квадратура Филона, представляющая собой квадратуру Котеса с весом. В случае использования формулы трапеции квадратура Филона выражается формулой:

$$\int_{z_1}^{z_2} F(z)e^{-pz} dz \int_{z_1}^{z_2} (az + b)e^{-pz} dz = f(z_2) - f(z_1),$$

где

$$f(z) = -\frac{e^{-pz}}{p} \left(b + a \left(z + \frac{1}{p} \right) \right),$$

$$a = \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1}; b = \frac{F(z_1)z_2 - F(z_2)z_1}{z_2 - z_1}.$$

Подобную квадратуру предлагается использовать в [1] и [2].
 Результаты вычислений показаны в табл. 2.

Таблица 2

Трудоёмкость вычисления подынтегральной функции интеграла Мичелла в форме (3)

Тип квадратуры	Модель Виглея	Параболическая модель
Филон	-	-
Трапеции с подбором шага	6916553	-
Симпсон с подбором шага	105987	-
Симпсон с адаптацией	91791	248667
Котес 9-точек с адаптацией	12215	375188
Гаусс-Кронрод 15-точек с адаптацией	8906	-
Гаусс-Кронрод 61-точка с адаптацией	90408	87428
Гаусс-Кронрод произвольного порядка	-	-
Кленшоу-Куртис произвольного порядка	4185	104744

Прочерки означают, что результат не был получен из-за очень большого количества вычислений.

Можно видеть, что квадратура Кленшоу-Куртиса показывает в целом лучшие результаты. Квадратура Гаусса-Кронрода ведёт себя непредсказуемо, так как при повышении порядка квадратуры, количество вычислений резко увеличивается. Обычно надёжные квадратуры Котеса оказались весьма неэффективными. Хотя квадратура Филона не справилась с вычислениями с заданной точностью, тем не менее, как можно показать, при фиксированном количестве разбиений она работает достаточно надёжно.

Обсуждение

По результатам вычислений можно сказать, что квадратура Кленшоу-Куртиса выглядит предпочтительнее всех остальных. Видимо, хорошие аппроксимационные свойства полинома Чебышева обеспечивают надёжное и эффективное вычисление всех интегралов, входящих в ИМ, с заданной точностью. Можно предположить, что проблемы, возникающие с другими квадратурами, не проявлялись, так как обычным подходом при вычислении ИМ является интегрирование с заданным числом разбиений интервалов интегрирования по z и по x , а не с заданной точностью. Последнее предъявляет повышенные требования к вычислительным алгоритмам, особенно в тех случаях, когда подынтегральная функция осциллирует вблизи нуля.

Выводы

Таким образом, наиболее предпочтительным при вычислении интеграла Миччеля представляется использование квадратуры Кленшоу-Кертиса, которая обеспечивает небольшое количество обращений к функциям при обеспечении высокой точности результата.

Список литературы

1. Пикин Ю.Д. Тимошин Ю.С. Расчёт волнового сопротивления судов на электронно-вычислительной машине // Труды НТО Судпрома, 1965. Вып. 64. с. 62-69.
2. Shahjada bin Tarafder Md., Gazi bin M. Khalil, Ikhtiar bin Mahmud S. M. Computation of wave-making resistance of wigley hull form using michell's integral // Journal - The Institution of Engineers, Malaysia, 2007. Vol. 68, No.4. pp. 33-40.
3. А.Ш. Готман А.Ш. Теоретические и экспериментальные основы гидродинамики водоизмещающих судов. Новосибирск. Изд-во СГУВТ, 2018 – 613 с.
4. Камил М.С. Вычисление интеграла Митчела волнового сопротивления для однокорпусного судна методом конечного корня // «Морские интеллектуальные технологии», 2014. N. 3 (25) Т.1. С. 83-90.
5. Павленко, Г.Е Сопротивление воды движению судов. М.: Морской транспорт, 1956. 508 с.
6. Войткунский, Я.И. Сопротивление воды движению судов Л.: Судостроение, 1988. 288 с.
7. Ашик, В.В. Проектирование судов Л.: Судостроение, 1985. 320 с.
8. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: Раско, 1991. 272 с.
9. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer Methods for Mathematical Computations Prentice Hall, 1977. 270 pp.
10. Kronrod, a C code which computes both a Gauss quadrature rule of order N, and the Gauss-Kronrod rule of order 2*N+1. URL: https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/c_src/kronrod/kronrod.html (дата обращения 19.07.2022).
11. Kahaner D., Nash S., Moler C.B, Forsythe G.E., Malcolm M.A. Numerical Methods and Software. Prentice Hall, 1989 495 pp.
12. O'Hara, H., Smith F. J. Error estimation in Clenshaw-Curtis quadrature formula. Computer Journal, 1968. N. 11 (2), pp. 213–219.
13. Oliver J. A Doubly-Adaptive Clenshaw-Curtis Quadrature Method. The Computer Journal, 1972. Vol. 15 (2). pp 141–147. DOI: <https://doi.org/10.1093/comjnl/15.2.141>.

References

1. Pikin YU.D. Timoshin YU.S. Raschet volnovogo soprotivleniya sudov na ehlektronno-vychislitel'noi mashine // Trudy NTO Sudproma, 1965. Vyp. 64. s. 62-69.
2. Shahjada bin Tarafder Md., Gazi bin M. Khalil, Ikhtiar bin Mahmud S. M. Computation of wave-making resistance of wigley hull form using michell's integral // Journal - The Institution of Engineers, Malaysia, 2007. Vol. 68, No.4. pp. 33-40.
3. A.SH. Gotman A.SH. Teoreticheskie i ehksperimental'nye osnovy gidroinamiki vodoizmeshchayushchikh sudov. Novosibirsk. Izd-vo SGUVT, 2018 – 613 s.
4. Kamil M.S. Vychislenie integrala Mitchela volnovogo soprotivleniya dlya odnokorpusnogo sudna metodom konechnogo kornya // «Morskie intellektual'nye tekhnologii», 2014. N. 3 (25) T.1. S. 83-90.
5. Pavlenko, G.E Soprotivlenie vody dvizheniyu sudov. M.: Morskoi transport, 1956. 508 s.
6. Voitkunskii, YA.I. Soprotivlenie vody dvizheniyu sudov L.: Sudostroenie, 1988. 288 s.
7. Ashik, V.V. Proektirovanie sudov L.: Sudostroenie, 1985. 320 s.
8. Mudrov A.E. Chislennye metody dlya PEHVM na yazykakh Beisik, Fortran i Paskal'. Tomsk: Rasko, 1991. 272 s.
9. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer Methods for Mathematical Computations Prentice Hall, 1977. 270 pp.

10. Kronrod, a C code which computes both a Gauss quadrature rule of order N, and the Gauss-Kronrod rule of order $2*N+1$. URL: https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/c_src/kronrod/kronrod.html (access 19.07.2022).
11. Kahaner D., Nash S., Moler C.B, Forsythe G.E., Malcolm M.A. Numerical Methods and Software. Prentice Hall, 1989 495 pp.
12. O'Hara, H., Smith F. J. Error estimation in Clenshaw-Curtis quadrature formula. Computer Journal, 1968. N. 11 (2), pp. 213–219.
13. Oliver J. A Doubly-Adaptive Clenshaw-Curtis Quadrature Method. The Computer Journal, 1972. Vol. 15 (2). pp 141–147. DOI: <https://doi.org/10.1093/comjnl/15.2.141>.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Платов Александр Юрьевич, д.т.н., доцент, зав. кафедрой прикладной информатики и статистики, Нижегородский архитектурно-строительный университет (ФГОУ ВО «ННГАСУ»), 603950, Н.Новгород, ул. Ильинская, 65, e-mail: platoff@mail.ru

Alexander J. Platov, Dr. Sci. Tech, head of Applied Informatics and Statistic Chair, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, 603950, Nizhny Novgorod, Ilyinskaya st., 65

Платов Юрий Иванович, д.т.н., проф., профессор кафедры управления транспортом, Волжский государственный университет водного транспорта (ФГБОУ ВО «ВГУВТ»), 603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5, e-mail: platov_ji@mail.ru

Juri I. Platov, Dr. Sci. Tech, professor of Transport Management Chair, Volga State University of Water Transport, 603951, Nizhny Novgorod, Nesterova st., 5

Статья поступила в редакцию 19.09.2022; опубликована онлайн 20.12.2022.
Received 19.09.2022; published online 20.12.2022.