

ЭКСПЛУАТАЦИЯ ВОДНОГО ТРАНСПОРТА, ВОДНЫЕ ПУТИ, СООБЩЕНИЯ И ГИДРОГРАФИЯ

WATER TRANSPORT OPERATION, WATERWAYS, COMMUNICATIONS AND HYDROGRAPHY

УДК 004.942

DOI: 10.37890/jwt.vi78.444

Особенности создания математической модели и ее реализации для моделирования гидродинамики речного потока в нижнем течении р. Оки

И.В. Липатов

ORCID: 0000-0002-8770-0522

Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия.

Аннотация. Развитие вычислительной техники и усложнение инженерных задач сделало математическое моделирование неотъемлемой частью проектных работ при возведении сложных воднотранспортных и мостовых гидротехнических сооружений. Это позволяет при минимуме трудо-интеллектуальных затрат получить максимум информации о характере взаимодействия будущего сооружения и речного русла. Моделирование гидродинамики речных потоков сопряжено со сложной топологией расчетной области дна. В дополнение к этому приходится решать трехмерные задачи на базе уравнений Навье-Стокса. Последние в сочетании с проблемой соотношения размеров длины, ширины и глубины ставят дополнительные проблемы на пути практической реализации и получения результата. Особенно ярко эти проблемы проявляются при моделировании крупных рек Европейской части России, таких как Ока и Волга. Это обусловлено тем, что плановые размеры речного потока в сотни раз превышают значения глубин, а строгая аппроксимация расчетной области требует применения равноразмерных расчетных элементов. Обойти эти проблемы позволяет применение современных CAD/CAE вычислительных технологий в сочетании с особыми настройками итерационного решателя. Результаты применения этих достижений вычислительных технологий применительно к решению задачи для нижних течений р. Ока представлены в статье.

Ключевые слова: численное моделирование, моделирование речных потоков, граничные условия, генерации расчетной сетки; математические модели.

Features of creating a mathematical model and its implementation for modeling the hydrodynamics of a river flow in the lower district of the Oka r.

Igor V. Lipatov

ORCID: 0000-0002-8770-0522

Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The development of computer technology and the complication of engineering problems have made mathematical modeling an integral part of design work in the construction of complex water transport and bridge hydraulic structures. This allows, with a minimum of labor and intellectual costs, to obtain maximum information about the nature of

the future interaction between the future structure and the river channel. Modeling the hydrodynamics of rivers is associated with a complex topology of the computational bottom area. In addition to this, one has to solve three-dimensional problems based on the Navier-Stokes equations. The latter, in combination with the problem of the ratios of the dimensions of length, width and depth, pose additional problems in the way of practical implementation and obtaining results. These problems are especially pronounced when modeling large rivers in the European part of Russia, such as the Oka and Volga. This is due to the fact that the planned dimensions of the river flow are hundreds of times greater than the depth values, and a strict approximation of the computational domain requires the use of equal-dimensional, computational elements. These problems can be circumvented by the use of modern CAD/CAE computing technologies in combination with special settings of the iterative solver. The results of applying these achievements of computational technologies in relation to solving the problem for the lower reaches of the river. Oka is presented in the article.

Keywords: numerical simulation, simulation of river flows, boundary conditions, computational grid generation; mathematical models.

Введение

Большинство рек в России помимо того, что служат источником пресной воды, являются транспортными артериями с активным судоходством. В дополнение к транспортной функции развитие экономики требует возведения и эксплуатации энергетических и воднотранспортных сооружений. Все эти объекты требуют максимально корректной оценки характера взаимодействия речного потока с окружающей средой и адекватной оценки отклика реки на техногенное воздействие.

Традиционно для ответа на вышеназванные вопросы использовались многолетние наблюдения и русловые съемки интересующих участков реки. Пространственно-временной характер развития руслового процесса позволяет оценить направления и тенденции аккумулятивно-эрозионных процессов динамики русловых потоков. Но в целом этот путь имеет чисто экстраполяционный характер. Поэтому при изменении водности года или иных водно-климатических факторов, а также вмешательство в топологию дна, оправдываемость такого прогноза резко падает.

Для решения проектных задач по оценке характера отклика речного потока на внешнее техногенное воздействие, применяют лабораторный эксперимент. Но специфика моделирования речных потоков поставила вопрос о масштабном факторе. В частности, при моделировании даже малых рек по критерию Фруда требуется использовать геометрический масштаб, который меняет режим движения воды с зоны квадратичной турбулентности на ламинарный. В результате адекватное воспроизведение аккумулятивно-эрозионных процессов в лаборатории становится практически невозможным.

Тем не менее, практика все настойчивее требует адекватных ответов на вопрос о характере изменения русловых процессов, при том или ином техногенном воздействии. В результате на практике стали активно применяться достижения вычислительной математики и выполняться математическое моделирование гидродинамики речного потока.

Базовые уравнения математической модели

Отправной точкой создания компьютерных математических моделей является решение полной стационарной системы гидродинамических уравнений Навье-Стокса с дополнением их уравнением неразрывности и последующим замыканием гипотезой турбулентности [1]:

$$F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) = 0; \quad (1)$$

$$F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) = 0;$$

$$F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 ,$$

где t – время;

V_x, V_y, V_z – компоненты абсолютной скорости движения жидкости;

F_x, F_y, F_z – компоненты массовых сил;

p – пьезометрическое давление;

ρ – плотность;

ν – эффективная вязкость

Как показывает практика, наиболее перспективным методом решения данной системы уравнений, применительно к описанию речных потоков, является метод контрольного объёма [1, 2]. Суть метода состоит в следующем. Расчётная область разбивается на некоторое число непересекающихся контрольных объёмов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объёме. Дифференциальные уравнения (1), расписываются применительно к каждому контрольному объёму. Причем переход от геометрически сложной расчетной области к совокупности геометрически простых объёмов (кубик, параллелепипед и т.д.), позволяет перейти от дифференциальных соотношений к разностным для интегрирования по каждому контрольному объёму. Для вычисления интегралов используют кусочные профили (аппроксимационные функции), которые описывают изменение исследуемой величины между узловыми точками. Получаемые в результате дискретные аналоги дифференциальных уравнений по каждому контрольному объёму, сворачиваются в систему уравнений. Незвестными в этой системе становятся значения функции, описывающие кинематическую структуру потока (V_x, V_y, V_z), действующие в центре каждого контрольного объёма сообразно разбивке расчетной контрольно-объёмной сетки.

Одним из важных преимуществ метода контрольного объёма является то, что в нём заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия для любого объёма, группы объёмов и всей расчётной области. Это свойство справедливо при любом количестве узловых точек, а не только для предельного случая их очень большого числа. Поэтому даже решение на грубой сетке будет удовлетворять точным интегральным балансам [2].

Наиболее сложным вопросом при создании математических моделей движения речного русла является вопрос учета турбулизации потока, т.е. «замыкания» системы уравнений (1). На практике «замыкание» системы уравнений (1) выполняют выбором необходимой математической модели для описания турбулентных эффектов в потоке жидкости. В явном виде за их присутствие в системе уравнений (1) отвечает величина эффективной вязкости – ν . Согласно современным представлениям о природе турбулентных процессов, эффективная вязкость является алгебраической суммой кинематической и турбулентной вязкости (последнюю еще называют коэффициентом турбулентного обмена). Причем, если первая величина является константой жидкости, то по поводу теоретического определения второй величины имеется большое количество мнений. Наиболее проверенным является так называемый $k - \epsilon$ – подход, которым далее и воспользуемся. Согласно этому подходу коэффициент турбулентной вязкости (коэффициент турбулентного обмена) определяется как [3, 4, 5, 6]:

$$v_T = c_p \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2)$$

где k – кинетическая энергия турбулентности,
 ε – коэффициент диссипации турбулентной кинетической энергии.
 C_p – кинетическая энергия турбулентности,

Кинетическая энергия турбулентности и ее диссипация (рассеивание) в потоке, являются основными количественными характеристиками турбулизации речного потока, так как напрямую связаны с турбулентными касательными напряжениями в потоке. Для их численного определения возникает необходимость в дополнении системы уравнений (1) группой уравнений, описывающих значения k и ε в области потока. Работа с k и ε более удобна, чем прямой учет касательных турбулентных напряжений, так как позволяет существенно упростить натурные измерения и избавиться от ряда математических сложностей при численной реализации вычислительной процедуры. В частности, такой подход позволяет по отдельности считать турбулентность в ядре потока, где она полностью развивается. Параллельно с этим, для придонных областей, в случае необходимости, можно использовать соответствующие переходные законы-функции пристеночных переходов. Эти функции, несмотря на свою простоту, достаточно надежно обеспечивают устойчивость расчетной процедуры и получение достаточно корректного с физической точки зрения результата. Для описания турбулентности в речном потоке используем высокорейнольдсовскую гипотезу турбулентности в виде:

- для кинетической энергии турбулентности k :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} \rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \tilde{u}_j k - \frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \mu_t (P + P_B) - \rho \varepsilon - \frac{2}{3} \left(\mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \rho k \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu_t P_{NL} \quad (3)$$

где:

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t; P \equiv 2s_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; P_B = -\frac{g_i}{\sigma_{h,t}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (4)$$

$$P_{NL} = -\frac{\rho}{\mu_t} \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \left[P - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\rho k}{\mu_t} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \quad (5)$$

В этих выражениях $P_{NL} = 0$ – для линейных моделей, а σ_k – эмпирический коэффициент среды.

- скорость диссипации кинетической энергии ε определяется по формуле:

$$\frac{dk}{dn} = 0; \frac{d\varepsilon}{dn} = 0 \quad (6)$$

где $\sigma_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}$ и $C_{\varepsilon 4}$ - эмпирические коэффициенты, чьи значения, взятые из источников [5].

Для моделирования поведения функции турбулентности в переходной придонной зоне воспользуемся классическим экспоненциальным профилем скорости Никурадзе [7]. Шероховатость поверхности дна реки будем учитывать в соответствии с рекомендациями [8]. В методе Никурадзе эпюра поперечного потока описывается в виде функции нормального расстояния от дна.

С точки зрения математической физики, для совместного решения системы уравнений (1) необходимо определиться с расчетной областью потока и граничными условиями к задаче. Геометрическая область интегрирования напрямую определяется областью потока и текущим уровенным режимом на участке.

CAD-CAE технология реализации математической модели

Для практической реализации решения и получения численных результатов используется современные CAD-CAE технологии численного моделирования, схема реализации которых представлена на рис. 1:



Рис. 1. Схема реализации CAD-CAE вычислительной технологии

Для генерации расчетной сетки была выполнена CAD - обработка результатов водных изысканий, по необходимости дополненная локальными картографическим материалом из атласов ЕГС [10]. Результат объединения съемок представлен на рис. 2

После сборки всех локальных участков в единую модель, полученную поверхность рельефа дна подвергли ряду Булевых преобразований.

В комплекс Булевых операций вошло:

- Создание внешнего прямоугольного контура относительно поверхности рельефа дна каждого перекатного участка;
- Разделение прямоугольного контура на два тела с помощью поверхности рельефа дна;
- Удаление нижнего тела и удаление от верхнего тела ряда излишних деталей.
- Удаление вышележащего тела, в зависимости от отметки свободной поверхности воды.

В результате последовательного выполнения вышеописанного круга операций формируется твердотельная модель исследуемого участка (см. рис. 3).

Существенным фактором, определяющим кинематическую структуру потока на речном участке, является наличие опор мостов в русле реки, как строящихся, так и эксплуатируемых конструкций. При изыскании данная информация не собирается,

поэтому сотрудниками кафедры был выполнен натурный обмер геометрических размеров опор существующих мостов (см. рис. 4).

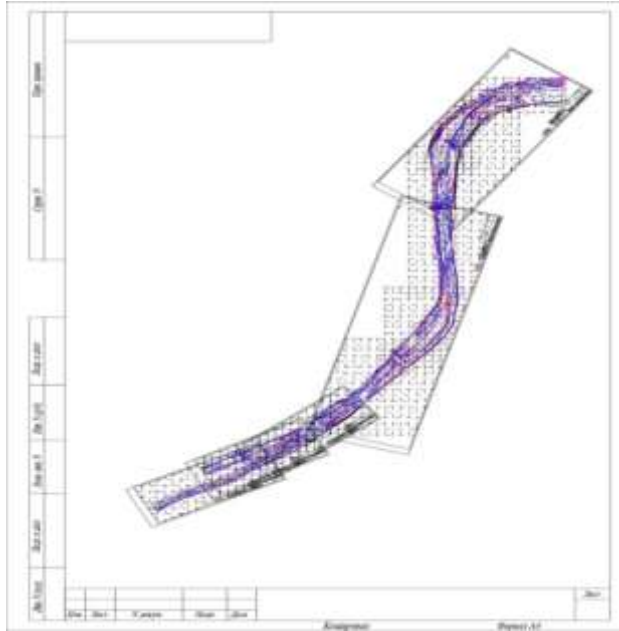


Рис. 2. Объединение результатов съемок и атласа ЕГС



Рис. 3. Твёрдотельная модель исследуемого участка реки



- а) Канавинский мост б) Метромост в) Молитовский мост г) Мызинский мост

Рис. 4. Мостовые конструкции на исследуемом участке

В большинстве случаев обмер конструкции опор реализовывался по «сухим» стойкам, и особой сложности не представлял (см. рис. 5)



Рис. 5. Стойка Молитовского моста

Если возможность обмера отсутствовала, то использовались опосредованные данные о геометрии конструкции и геодезических приемов для определения координат характерных точек. В результате натурного обследования были получены размеры поперечных сечений опорных мостовых конструкций (см. рис. 6).

- а) Канавинский мост



- б) Метромост

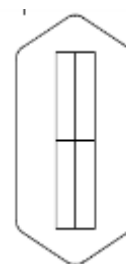


Рис. 6. Сечение стоек мостов

Так как опоры мостов полностью пронизывают речной поток по глубине, то на базе экструзии сечений были получены трехмерные модели подводных частей опор мостов. Примеры трехмерных твердотельных тел стоек Канавинского моста и Метромоста представлены на рис. 7.

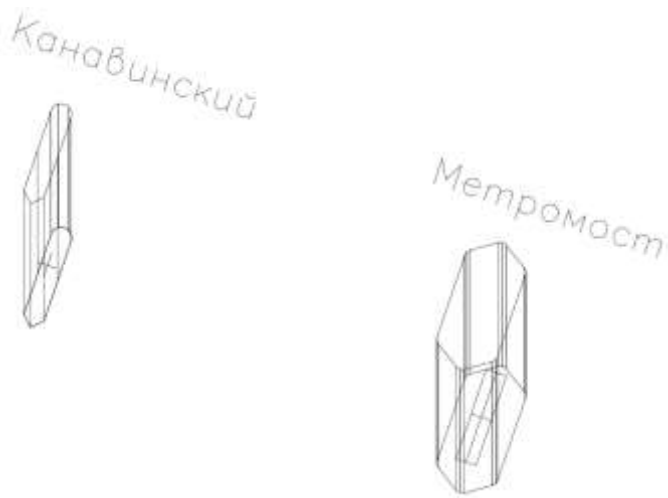


Рис. 7. Твёрдые тела опор мостов

Наличие общей твёрдотельной модели речного потока (см. рис. 3) и моделей опор существующих мостов (см. рис. 7), позволяет с помощью булевых операций вычесть пространства опор мостов в сечениях мостов из общей модели речного русла. Пример фрагмента твёрдотельной модели исследуемого участка река в районе Канавинского и Молитовского мостов после булевого вычитания моделей колонн мостов представлен на рис. 8 и 9.

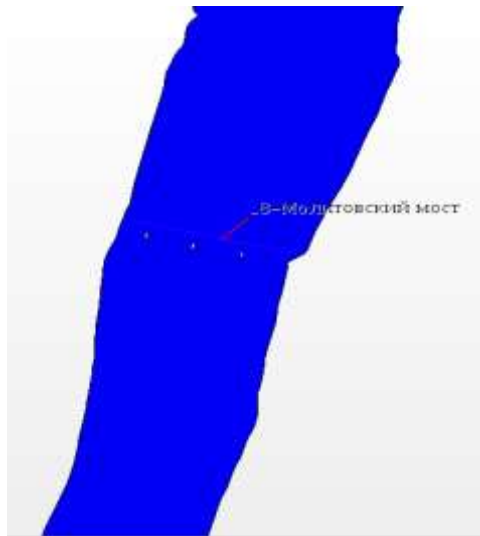


Рис. 8. Твёрдотельная модель в окрестности Молитовского моста



Рис. 9. Твёрдотельная модель в окрестности Канавинского моста

После вычитания из базовой модели реки опор всех четырех мостов мы создаем твердотельную геометрическую модель, соответствующую существующему состоянию исследуемого участка реки.

Граничные условия создаваемой математической модели и особенности реализации.

Наличие твердотельной модели позволяет перейти от CAD-этапа математического моделирования к CAE. Учитывая специфику нашей задачи, в расчетной области выделяется 4 граничных области (см. рис. 10):

- Входное сечение (область $\Omega 1$).
- Дно речного участка (область $\Omega 2$).
- Свободная поверхность (область $\Omega 3$).
- Выходное сечение (область $\Omega 4$).

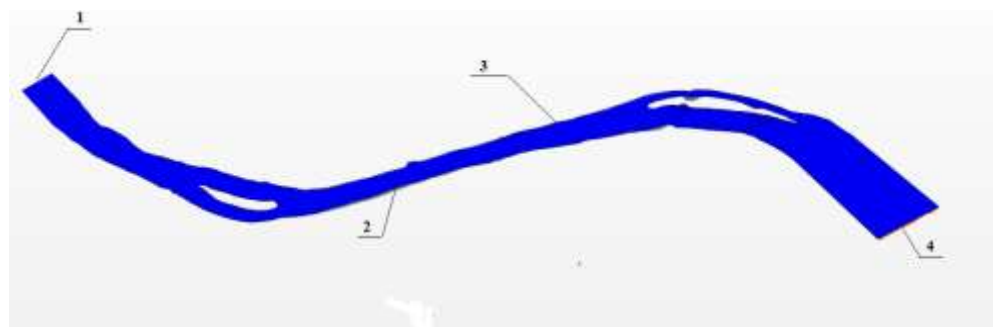


Рис. 10. Граничные области

В общем случае на всех граничных областях используются классические граничные условия:

Первая область – входное сечение ($X, Y, Z \in \Omega 1$):

$$V_n = V_{\text{течения}} = Q \text{ м}^3/\text{сек} / S \quad (7)$$

$$\kappa = 1.5 * (V_{\text{течения}} * I)^2 \quad (8)$$

$$\varepsilon = C_\mu^{0.75} * \kappa^{1.5} / L \quad (9)$$

где:

Q – расход воды во входном сечении соответствующий расчетному уровню;

S – площадь живого сечения на входе;

I – интенсивность турбулентности (в процентах). Согласно [9] принимаем равным 0.02 (2%);

L – характеристическое расстояние (в метрах). Согласно [9] принимаем равным 1.0 метр;

C_μ – турбулентная энергетическая константа, принимается по [3] = 0.09.

Вторая область – дно реки: (X, Y, Z ∈ Ω₂):

$$V_x = V_y = V_z = 0.0 \text{ м/сек} \quad (10)$$

$$\kappa = \varepsilon = 0 \quad (11)$$

Третья область – свободная поверхность реки: (X, Y, Z ∈ Ω₃):

$$V_z = 0.0 \text{ м/сек} \quad (12)$$

$$\frac{dk}{dn} = 0; \frac{d\varepsilon}{dn} = 0 \quad (13)$$

Четвертая область – выходное сечение (развитый поток) (X, Y, Z ∈ Ω₄):

$$p = 0 \quad (14)$$

$$\frac{dk}{dn} = 0; \frac{d\varepsilon}{dn} = 0 \quad (15)$$

Для создания расчетной сетки загружается файл с опорными точками по геометрической твердотельной CAD-модели реки. Практика применения различных алгоритмов для генерации расчетных сеток в границе замкнутого твердого геометрического тела показала, что лучше всего использовать метод «фронтального продвижения», реализация которого в нашем случае осуществляется в четыре этапа [11, 12, 13] (см. рис. 11):

- импортирование геометрии и подготовка поверхности;
- создание подповерхностей;
- создание поверхностной сетки;
- создание внутренней, объемной, расчетной сетки;

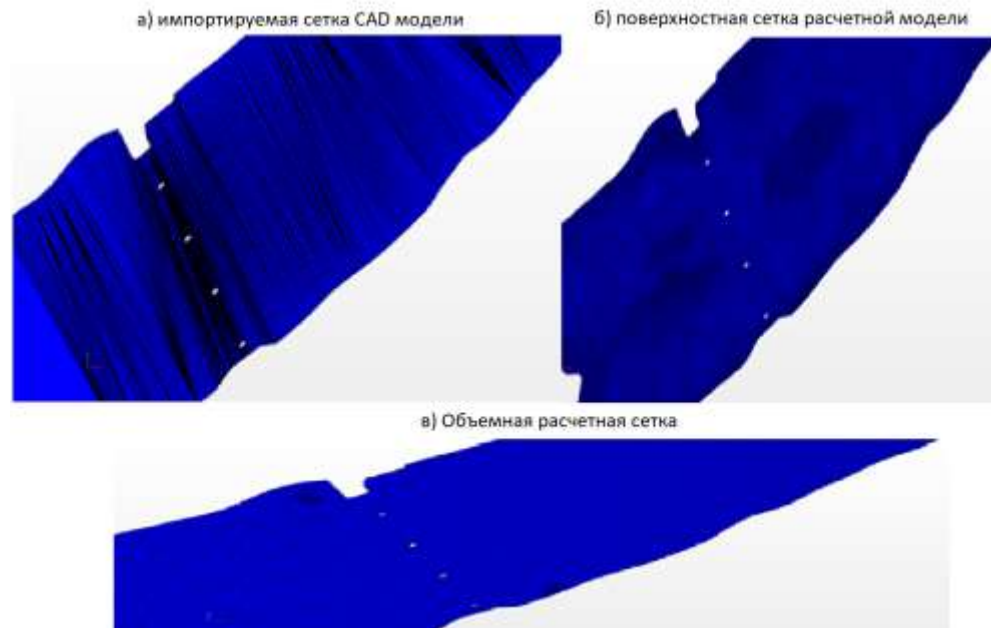


Рис. 11. Этапы генерации расчетной сетки

Данный алгоритм отлично разбивает расчетную область на кубики или равнобедренные тетраэдры. Но применительно к данной задаче такой путь неприемлем. Это связано с тем, что длина участка – 10 км, ширина – 0.8 км и средняя глубина – 5 метров. Генерируя расчетную сетку из кубиков с размером грани по 1 м, мы достаточно грубо обчисляем поток по глубине и излишне подробно по ширине и длине. При этом сетка будет состоять из нескольких десятков миллионов расчетных ячеек. Для обчисления такой матрицы, потребуется значительный вычислительный ресурс и мощность компьютера, которая пока для автора недоступна.

Единственным выходом из этой ситуации является отступление от жесткого критерия равноразмерности граней расчетной ячейки. Это позволит уменьшить дивергенцию и численную диффузию матрицы координат. В конечном итоге это позволит не допустить конвергенции (распада) расчетной процедуры решателя

Как показал анализ специальной литературы, современные алгоритмы включают в себя опции по работе с «плохими» сетками, т.е. сетками, у которых расчетные ячейки далеки от равноразмерных. Если соотношение размеров расчетных ячеек превосходит масштаб 1:10, то необходимо активировать дополнительные опции предикт-корректора решателя и более тонко подстраивать коэффициент недорелаксации при переходе от одной итерации к другой. Помимо этого, крайне эффективным может быть внесение корректировок в алгоритм решения сформированных систем уравнений. С одной стороны, это удлинит расчетную процедуру, а с другой – повысит устойчивость расчетной процедуры. В конечном итоге это позволяет стабилизировать итерационный процесс и довести расчетную процедуру решателя до уровня нужных невязок и получить корректное решение.

На практике этот подход реализуется следующим образом:

- подготовленная и импортированная CAD-геометрия внешней поверхности деформируется с учетом масштабных коэффициентов по глубине и ширине реки. В результате расчетная область приобретает менее вытянутые по длине очертания;

- затем реализуются все этапы генерации сетки метода «фронтального продвижения»;
- по завершении генерации расчетной сетки из равноразмерных расчетных ячеек в «искаженном» пространстве с помощью обратных пересчетных масштабных коэффициентов возвращают расчетную область в исходное положение;

Такой прием позволил сократить объём расчетной сетки до 0.8 – 1.2 миллиона расчетных ячеек. Несмотря на то, что равноразмерность расчетных ячеек значительно нарушается, с помощью дополнительных настроек решателя удалось свести итерационный процесс сходимости за приемлемый период времени до приемлемого уровня невязки.

В продолжение расчетной процедуры к сгенерированной сетке прикладываются граничные условия (7) – (15). Развитый постпроцессор вычислительного комплекса позволяет отслеживать и анализировать большой объем параметров в различных областях потока. Для контроля узловых гидродинамических параметров процесса на модели был выделен ряд характерных сечений и контрольных точек, позволяющих ориентироваться в процессе систематизации и анализа результатов моделирования.

Заключение

С целью выполнения анализа поведения потока и русловых процессов из системы были получены следующие данные:

Линии тока, входящие в расчетную область через входное сечение и покидающие его через произвольное живое сечение. В дополнение к общей схеме проводилась укрупненная детализация по характерным участкам речного потока с целью анализа русловых процессов на локальных участках.

Векторное отображение кинематической структуры потока как по всей длине участка, так и с локализацией по 5 характерным областям длиной до 0.5 км. При анализе это позволило определиться с размерами циркуляционных зон в потоке и выполнить прогноз русловых деформаций на различных этапах строительства.

Скалярное отображение модулей скорости, действующих на участке. По аналогии с векторным отображением снимались поля скоростей на всем участке и на локальных участках. Это позволило более детально определить действующие градиенты скоростей в критических областях.

Помимо этого, для анализа русловых процессов при строительстве моста фиксировались скорости потока в критически важных областях и проводилась оценка интенсивности аккумулятивных и эрозионных процессов. Наличие такого развернутого материала позволит на качественно новом уровне выполнить анализ русловых процессов в низовьях реки Оки. В совокупности с многовариантными расчетами технических решений по возведению моста позволило выбрать наиболее перспективное решение для последующей реализации.

Список литературы

1. Липатов И.В. Монография «Гидродинамика речных потоков и ее влияние на эксплуатационные параметры судоходных гидротехнических сооружений» - Н.Новгород изд. ВГУВТ с. 106
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
3. Launder, B.E., and Spalding, D.B. 1974. 'The numerical computation of turbulent flows', *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 3, pp. 269-289.
4. Rodi, W. 1979. 'Influence of buoyancy and rotation on equations for turbulent length scale', *Proc. 2nd Symp. on Turbulent Shear Flows*.

5. El Tahry, S.H. 1983. 'k- ω equation for compressible reciprocating engine flows', AIAA J. Energy, 7, No. 4, pp. 345–353.
6. Gutachten über die seitliche Einleitung von Überschusswasser in den Einfahrtsbereich der Schleuse Nürnberg – технический отчет BAW. Автор Кастен Торенц, Липатов И.В. - Карлсруэ - Bundesanstalt für Wasserbau (BAW) -Nr. 3.03.10043.00 – Dezember 2003.
7. Schlichting, H. "Boundary Layer Theory". 6th Edition, McGraw-Hill, New York. 1968.
8. Идельчик "Справочник по гидравлическим сопротивлениям"
9. Гришанин К.В. «Основы динамики русловых потоков», М. Транспорт 1996 г.
10. Атлас Единой глубоководной системы России.
11. H. Jin and R. I. Tanner, "Generation of Unstructured Tetrahedral Meshes by Advancing Front Technique", Int. J. Numer. Methods Eng., 36, 1805-1823 (1993).
12. R. Lohner and P. Parikh, "Generation of Three Dimensional Unstructured Grids by the Advancing-Front Method", Int. J. Numer. Methods Fluids, 8, 1135-1149 (1988)
13. J. Peraire, J. Peiro, L. Formaggia, K. Morgan and O. C. Zienkiewicz, "Finite Element Euler Computations in Three Dimensions", Int J. Numer. Methods Eng., 26, 2135-2159 (1988).

References

1. Lipatov I.V. Monografiy «Gidrodinamika rechnik potokov I ee vliyaniye na aksplyatatsionnie parametry sodokhodnix gidrotexnicheskix sooryzheniy» - N.Novgorod izd, VGUVT c. 106
2. Patankar C. CHislennyye metody pesheniy zadach teploobmena I dinamiki zhidkosti / Perev c angl. – M.: Anergoidat, 1984. – 152 c.
3. Launder, B.E., and Spalding, D.B. 1974. 'The numerical computation of turbulent flows', Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 3, pp. 269-289.
4. Rodi, W. 1979. 'Influence of buoyancy and rotation on equations for turbulent length scale', Proc. 2nd Symp. on Turbulent Shear Flows.
5. El Tahry, S.H. 1983. 'k- ω equation for compressible reciprocating engine flows', AIAA J. Energy, 7, No. 4, pp. 345–353.
6. Gutachten über die seitliche Einleitung von Überschusswasser in den Einfahrtsbereich der Schleuse Nürnberg – технический отчет BAW. Автор Кастен Торенц, Липатов И.В. - Карлсруэ - Bundesanstalt für Wasserbau (BAW) -Nr. 3.03.10043.00 – Dezember 2003.
7. Schlichting, H. "Boundary Layer Theory". 6th Edition, McGraw-Hill, New York. 1968.
8. Idelchik "Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam" / M – Transport/ - 1970
9. Grishanin K.B. «Osnovy dinamiki ryslovix potokov», M. Transport 1996 c.
10. Atlas Edinoy glubokovodnoy sistemi Rossii. Transport -2015.
11. H. Jin and R. I. Tanner, "Generation of Unstructured Tetrahedral Meshes by Advancing Front Technique", Int. J. Numer. Methods Eng., 36, 1805-1823 (1993).
12. R. Lohner and P. Parikh, "Generation of Three Dimensional Unstructured Grids by the Advancing-Front Method", Int. J. Numer. Methods Fluids, 8, 1135-1149 (1988)
13. J. Peraire, J. Peiro, L. Formaggia, K. Morgan and O. C. Zienkiewicz, "Finite Element Euler Computations in Three Dimensions", Int J. Numer. Methods Eng., 26, 2135-2159 (1988).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Липатов Игорь Викторович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры водных путей и гидротехнических сооружений Волжский государственный университет водного транспорта (ФГБОУ ВО «ВГУВТ»), 603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5, e-mail: i_lipatov@mail.ru

Igor V. Lipatov professor, doctor of technical sciences, professor of the Department of waterways and hydraulic structures, Volga State University of Water Transport, 5, Nesterov st, Nizhny Novgorod, 603951

Статья поступила в редакцию 23.01.2024; опубликована онлайн 20.03.2024.
Received 23.01.2024; published online 20.03.2024